Einführung in die Informatik

- Dipl.-Inf., Dipl.-Ing. (FH) Michael Wilhelm
- Hochschule Harz
- FB Automatisierung und Informatik
- mwilhelm@hs-harz.de
- Raum 2.202
- Tel. 03943 / 659 338

Computernumerik vs. Numerik

- Menge reellen Zahlen ist unendlich
- Menge der Fließkommazahlen ist beschränkt
- Stellen der Mantissen
  - single: 6-7 Stellen
  - double: 13-14 Stellen
  - extended: 19-20 Stellen
- Menge der Fließkommazahlen $\subset \Re$
- Berechnungsfehler bei Subtraktion und Division durch Stellenauslöschung

1. Beispiel:

$$f = \frac{(A+B)^2 - A^2 - 2 \cdot A \cdot B}{B^2}$$

A	**B**	**Ergebnis**
1	1	1
100	1	1
1E100	2E100	1
1000	0.0001	-95.36
1E9	1	-1024
1000	0.001	0.99093

Quelle:
Programmierung von Vektorrechnern und Parallelrechnern (Klaus Schmidt)

2. Beispiel: $p(x,y) = 9x^4 - y^4 + 2y^2$

- X = 10864
- y = 18817

- Lösung: p(x,y) = 1

Sprache	Single	Double	Extended
Delphi	1	1	1
Visual Studio	2	2	2
Excel	2		
ArcView (Single)	2957695507885613800000000000000000000000,000		

Quelle:
Scientific Computation with Automatic Result Verification, Kulisch, Stetter, S. 146

3. Beispiel: $p(x,y) = 83521y^8 + 578x^2y^4 - 2x^4 + 2x^6 - x^8$

- X = 9478657
- y = 2298912

- Lösung: p(x,y) = -179 689 877 047 297
- Lösung: p(x,y) = -1,79 689 877 047 297E+14

Sprache	Single	Double	Extended
Delphi	-5,316912E+36	-5,3169119831396E36	
Visual Studio	-2.918262e+042	-2.177807e+040	-2.177807e+040 0,00
Excel	0		
ArcView (Single)	6.58041e+213		

Quelle:
Scientific Computation with Automatic Result Verification, Kulisch, Stetter, S. 146

4. Beispiel:

$$f = 333{,}75b^6 + a^2\cdot(11a^2b^2 - b^6 - 121b^4 - 2) + 5{,}5b^8 + a/(2\cdot b)$$

- a = 77617
- b = 33096

- Lösung: f = [-0.8273961, -0.8273960]

Testrechnung auf einer IBM 4361

Real:	(7 Digits)	1,172604
Double:	(14 Digits)	1,172604
Extended:	(28 Digits)	1,172604

PC mit Delphi: (Extended):	5,7646075230342E17
	3,8769645860788E17
PC mit Visual Studio (long double):	1.172603940053179
	-8.67197002506345E45

Quelle:
Scientific Computation with Automatic Result Verification, Kulisch, Stetter, S. 156

./numeri Kulisch Bsp3

Nullstellensuche einer Funktion:

- Newton-Verfahren
- Fixpunkt-Iteration
- Intervall-Halbierungsverfahren

Nullstellensuche mit Newton

- Gegeben eine Funktion (1 bis n-Dimensionen)
- Gesucht die Nullstellen der Funktion
- Gegeben ein Startwert x_0
- Folgende Iterationsvorschrift konvergiert gegen die Nullstelle

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Nullstellensuche mit Newton

$$x_{i+1} := x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

- Die Formel zeigt noch einmal deutlich die Wertzuweisung (:=) an ein neues x.
- Bei Polynomen höheren Grades ist es nicht möglich eine analytische Lösung zu berechnen. Deshalb versucht man mit einem möglichst guten Startwert x_0 die Iteration zu beginnen.
- Die trügerische Hoffnung, zur „richtigen“ Nullstelle zu konvergieren ist sehr fraglich. In manchen Fällen ist sogar eine Divergenz zu erwarten.

Beispiel Newtonverfahren:

Gesucht ist die Nullstelle folgender Funktion:

$f(x) = x^3 + 3x - 7 = 0$

1. Ableitung:

$f'(x) = 3x^2 + 3$

$$Iteration: \quad x_{i+1} = x_i - \frac{f(x)}{f'(x)} = x_i - \frac{x^3 + 3 \cdot x - 7}{3 \cdot x^2 + 3}$$

- Startwert bestimmen
- Einsetzen
- Wiederholte Iteration

Beispiel Newtonverfahren:

Gesucht ist die Nullstelle folgender Funktion:

$f(x) = x^4 - 1 = 0$

1. Ableitung:

$f'(x) = 4x^3$

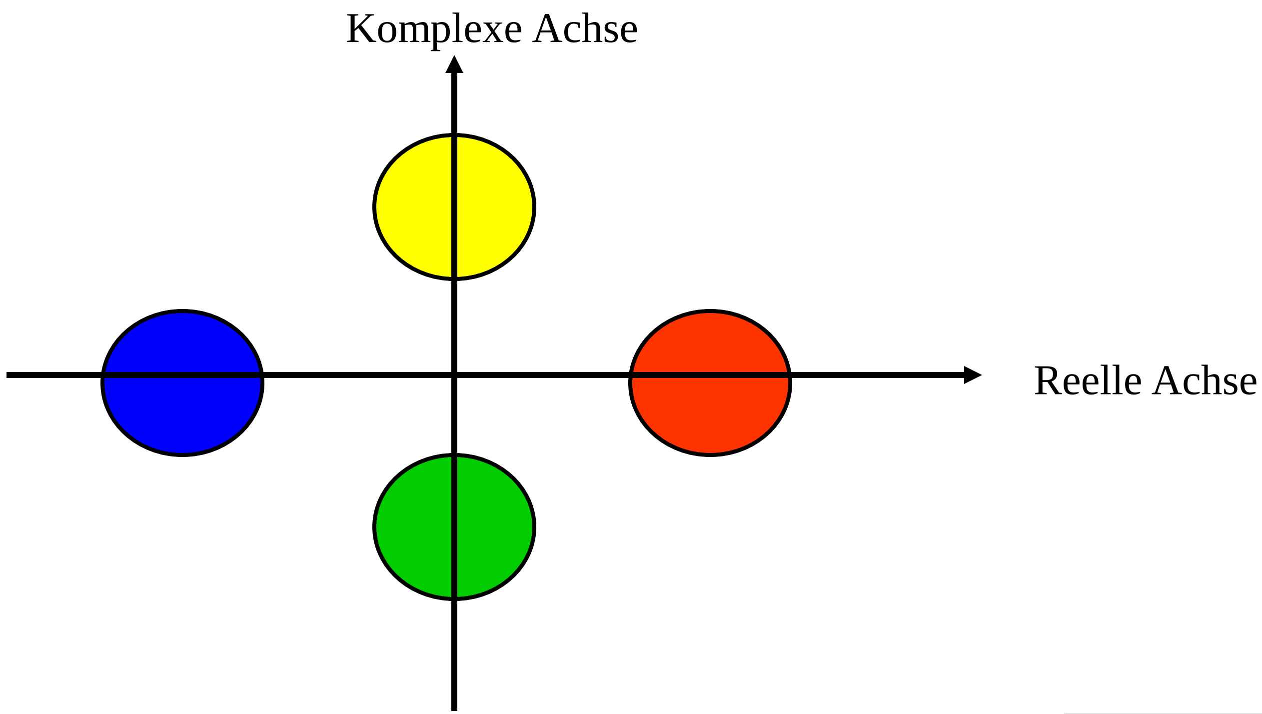
$$Iteration: \quad x_{i+1} = x_i - \frac{f(x)}{f'(x)} = x_i - \frac{x^4 - 1}{4 \cdot x^3}$$

Nullstellen:

- x1 = +1 / 0i
- x2 = -1 / 0i
- x3 = 0 / +1i
- x4 = 0 / -1i

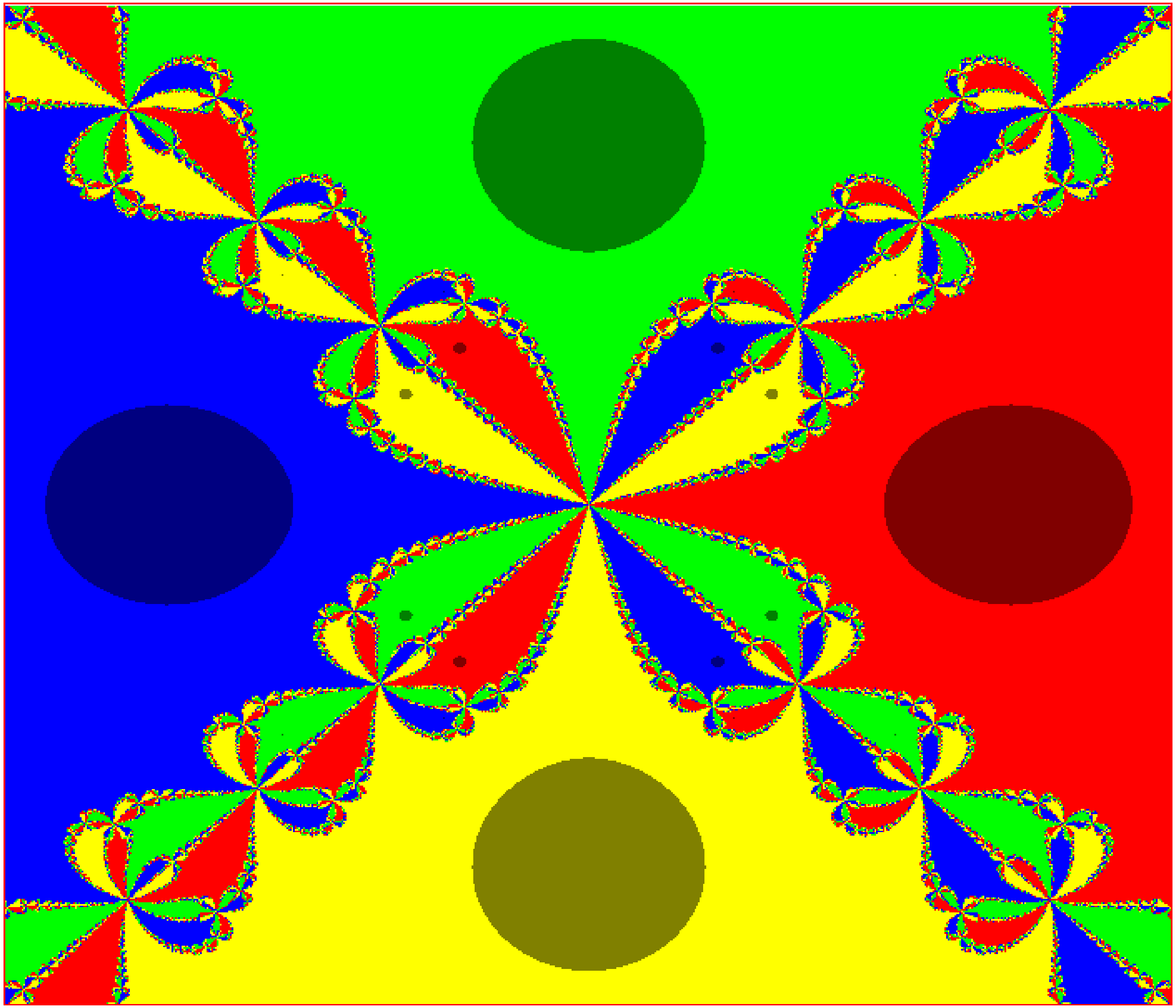
Beispiel $f(x) = x^4-1$:

Hubbard fragte sich nun für einen beliebiges Punkt, gegen welche Nullstelle das Newton-Verfahren konvergiere und ordnete jeder Nullstelle eine Farbe zu. Damit konnte jeder geprüfte Punkt aus der komplexen Ebene einer Farbe zugeordnet werden.



Hubbard

Newton für die Funktion x^4-1



Fixpunkt-Iteration einer Funktion

- Gegeben eine Funktion (1 bis n-Dimensionen)
- Gesucht die Nullstellen der Funktion
- Gegeben ein Startwert x_0
- Auflösen nach dem höchsten Exponenten
- Iteration mit der Näherungsfunktion

$$F = f(x)$$

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

Beispiel Iterationsverfahren:

Gesucht ist die Nullstelle folgender Funktion:

$f(x) = x^3 + 3x - 7 = 0$

Auflösen nach der höchsten Potenz: $x^3 = 7 - 3x$

$$3.\,Wurzel: \quad x = \sqrt[3]{7 - 3 \cdot x}$$

- Startwert bestimmen
- Einsetzen
- Wiederholte Iteration

Excel

Iteration mit Startwert x=5

+5	1,407121018
-2	1,405866024
2,351334688	1,406500708
-0,377985795	1,406179803
2,011101381	1,406342075
0,988773046	1,406260024
1,591844025	1,406301514
1,305395314	1,406280534
1,455557595	1,406291143
1,380919225	1,406285778
1,418999878	1,406288491
1,399829973	1,406287119
1,409545329	1,406287813
1,404638359	1,406287462
	1,40628764
	1,40628755

Beispiel Iterationsverfahren:

Gesucht ist die Nullstelle folgender Funktion:

$$f(x) = x^5 + 3x^2 + 2x - 7 = 0$$

Auflösen nach x: $x^5 = 7 - 2 \cdot x - 3x^2$

$$5. \mathit{Wurzel}: \quad x = \sqrt[5]{7 - 2 \cdot x - 3 \cdot x^2}$$

- Startwert bestimmen
- Einsetzen
- Wiederholte Iteration

Iteration mit Startwert x=1

1
1,148698355
0,942592272
1,19621998
0,793576034
1,286460079
-0,8833517
1,450724923
-1,172424466
1,391722326
-1,097751602
1,410366348
-1,123259071
1,40430216

-1,115186869
1,406254184
-1,117807689
1,4056238
-1,116963691
1,40582716
-1,117236208
1,405761534
-1,11714829
1,40578271
-1,117176661
1,405775877
-1,117167507

Beispiel Intervallhalbierungsverfahren:

Gesucht ist die Nullstelle einer Funktion:

Prinzip „binäres Suchen“

Gegeben: Funktion

obere Grenze

untere Grenze

Beispiel: $f(x) = 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 0{,}5$

Gesucht x mit folgenden Bedingungen:

$f(x) = 5{,}5$

$2 \leq x \leq 7$

Wertetabelle:

x	f(x)	Grenzen
2,0	4,50	
2,1	5,33	a
2,2	6,22	b

Lösung mit dem Intervall-Halbierungsverfahren

Starten der Iteration:

a	f(a)	b	f(b)	Mittelwert
2,1	5,33	2,2	6,22	
				f(2,15) = 5,7676
		2,15	5,7676	
				f(2,125) = 5,5469
		2,125	5,5469	
				f(2,1125) = 5,43797
2,1125	5,43797			
				f(2,11875) = 5,492
2.11875	5,492			
				f(2,121875) = 5,5195..
		2,121875	5,519560	

- 0,78629964784689118474566066128654

Exakte Lösung:

x : [2.11963298118022, 2.11963298118023]

x: [untere Grenze, obere Grenze]

$$x = \frac{2}{3} + \sqrt{\frac{19}{9}}$$

Weitere Beispiele:

2) gegeben eine Funktion f(x)

$f(x) = (4970x - 4923) / (4970x^2 - 9799x + 4830)$

Gesucht die numerische Ableitung an der Stelle x=1.

$f''(x) = (f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)) / h^2$

Schrittweite h	**Ergebnis**
10^{-4}	70,7804
10^{-5}	93,1278
10^{-8}	30695,4411

Exakt: $f''(1) = 94{,}0000$

Weitere Beispiele:

3) Lösen eines linearen Gleichungssystems

$$64.919.121{,}0 \cdot X \;-\; 159.018.721{,}0 \cdot Y \;=\; 1{,}0$$

$$41.869.520{,}5 \cdot X - 102.558.961{,}0 \cdot Y \;=\; 0{,}0$$

Lösung:

$$x = 205.117.922$$

$$y = 83.739.041$$

Sprache	Single	Double	Extended
Einsetzungs-verfahren	-2,22474479675293 -0,90824830532074	205117922 83739041	205117922 83739041
Gauß	205132766,376119 83745101,1911737		

enter a(1,1)   64919121

enter a(1,2)   -159018721

enter a(2,1)   41869520.5

enter a(2,2)   -102558961

enter b(1) 1

enter b(2) 0

Enter the number of decimal places desired for the solution.

n is interpreted as n decimal fixed-point

-n is interpreted as n decimal floating-point   20

Solution of equations

x(1) = 205117922.00000000000000000000~

x(2) = 83739041.00000000000000000000~

Weitere Beispiele:

4) Lösen eines linearen Gleichungssystems

$$714.110.331{,}0 \cdot x \quad - 2.067.243.373{,}0 \cdot y = 143$$

$$460.564.725{,}5 \cdot x \quad - 1.333.266.493{,}0 \cdot y = 0$$

Lösung:

$$x = 2.666.532.986$$

$$y = \quad 921.129.451$$

Sprache	Single	Double	Extended
Einsetzungs-verfahren	-2,83079051971436 -0,97787082195282	1,00124584249993E-7 3,45871226067779E-8	
Gauß	2.667.449.829,87188 921.446.166,336653		

Weitere Beispiele:

5) Berechnen des linearen Gleichungssystems

$$
\begin{array}{llllll}
-367.296\cdot t & -43.199\cdot u & +519.436\cdot v & -954.302\cdot w & = & 1 \\
+259.718\cdot t & -477.151\cdot u & -367.295\cdot v & -1.043.199\cdot w & = & 1 \\
+886.731\cdot t & +88.897\cdot u & -1.254.026\cdot v & -1.132.096\cdot w & = & 1 \\
+627.013\cdot t & +566.048\cdot u & -886.732\cdot v & +911.103\cdot w & = & 0
\end{array}
$$

Lösung:

$t = 8{,}86731088897 \cdot 10^{17}$

$u = 8{,}86731088897 \cdot 10^{11}$

$v = 6{,}27013566048 \cdot 10^{17}$

$w = 6{,}27013566048 \cdot 10^{11}$