

Einführung in die Informatik

- Dipl.-Inf., Dipl.-Ing. (FH) Michael Wilhelm
- Hochschule Harz
- FB Automatisierung und Informatik
- mwilhelm@hs-harz.de
- Raum 2.202
- Tel. 03943 / 659 338

Computernumerik vs. Numerik

- Menge reellen Zahlen ist unendlich
- Menge der Fließkommazahlen ist beschränkt
- Stellen der Mantissen
 - single: 6-7 Stellen
 - double: 13-14 Stellen
 - extended: 19-20 Stellen
- Menge der Fließkommazahlen $\subset \mathbb{R}$
- Berechnungsfehler bei Subtraktion und Division durch Stellenauslöschung

1. Beispiel:

$$f = \frac{(A + B)^2 - A^2 - 2 \cdot A \cdot B}{B^2}$$

| A | B | Ergebnis |
|-------|--------|----------|
| 1 | 1 | 1 |
| 100 | 1 | 1 |
| 1E100 | 2E100 | 1 |
| 1000 | 0.0001 | -95.36 |
| 1E9 | 1 | -1024 |
| 1000 | 0.001 | 0.99093 |

Quelle:

Programmierung von Vektorrechnern und Parallelrechnern (Klaus Schmidt)

2. Beispiel: $p(x,y) = 9x^4 - y^4 + 2y^2$

- $X = 10864$
- $y = 18817$

- Lösung: $p(x,y) = 1$

| Sprache | Single | Double | Extended |
|---------------------|---|--------|----------|
| Delphi | 1 | 1 | 1 |
| Visual Studio | 2 | 2 | 2 |
| Excel | 2 | | |
| ArcView (Single) | 2957695507885613800000000000000000000000000,000 | | |

Quelle:

Scientific Computation with Automatic Result Verification, Kulisch, Stetter, S. 146

3. Beispiel: $p(x,y) = 83521y^8 + 578x^2y^4 - 2x^4 + 2x^6 - x^8$

- $X = 9478657$
- $y = 2298912$
- Lösung: $p(x,y) = -179\ 689\ 877\ 047\ 297$
- Lösung: $p(x,y) = -1,79\ 689\ 877\ 047\ 297E+14$

| Sprache | Single | Double | Extended |
|---------------------|----------------|----------------------|------------------------|
| Delphi | -5,316912E+36 | -5,31691198313966E36 | |
| Visual Studio | -2.918262e+042 | -2.177807e+040 | -2.177807e+040 0,00 |
| Excel | 0 | | |
| ArcView (Single) | 6.58041e+213 | | |

Quelle:

Scientific Computation with Automatic Result Verification, Kulisch, Stetter, S. 146

4. Beispiel:

$$f = 333,75b^6 + a^2 \cdot (11a^2b^2 - b^6 - 121b^4 - 2) + 5,5b^8 + a/(2 \cdot b)$$

- $a = 77617$

- $b = 33096$

- Lösung: $f = [-0.8273961, -0.8273960]$

Testrechnung auf einer IBM 4361

- Real: (7 Digits) 1,172604

- Double: (14 Digits) 1,172604

- Extended: (28 Digits) 1,172604

PC mit Delphi: (Extended): 5,76460752303423E17

3,87696458607886E17

PC mit Visual Studio (long double): 1.172603940053179

-8.671970025063454E45

Quelle:

Scientific Computation with Automatic Result Verification, Kulisch, Stetter, S. 156

Nullstellensuche einer Funktion:

- Newton-Verfahren
- Fixpunkt-Iteration
- Intervall-Halbierungsverfahren

Nullstellensuche mit Newton

- Gegeben eine Funktion (1 bis n-Dimensionen)
- Gesucht die Nullstellen der Funktion
- Gegeben ein Startwert x_0
- Folgende Iterationsvorschrift konvergiert gegen die Nullstelle

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Nullstellensuche mit Newton

$$x_{i+1} := x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

- Die Formel zeigt noch einmal deutlich die Wertzuweisung ($:=$) an ein neues x .
- Bei Polynomen höheren Grades ist es nicht möglich eine analytische Lösung zu berechnen. Deshalb versucht man mit einem möglichst guten Startwert x_0 die Iteration zu beginnen.
- Die trügerische Hoffnung, zur „richtigen“ Nullstelle zu konvergieren ist sehr fraglich. In manchen Fällen ist sogar eine Divergenz zu erwarten.

Beispiel Newtonverfahren:

Gesucht ist die Nullstelle folgender Funktion:

$$f(x) = x^3 + 3x - 7 = 0$$

1. Ableitung:

$$f'(x) = 3x^2 + 3$$

$$\textit{Iteration: } x_{i+1} = x_i - \frac{f(x)}{f'(x)} = x_i - \frac{x^3 + 3 \cdot x - 7}{3 \cdot x^2 + 3}$$

- Startwert bestimmen
- Einsetzen
- Wiederholte Iteration

Beispiel Newtonverfahren:

Gesucht ist die Nullstelle folgender Funktion:

$$f(x) = x^4 - 1 = 0$$

1. Ableitung:

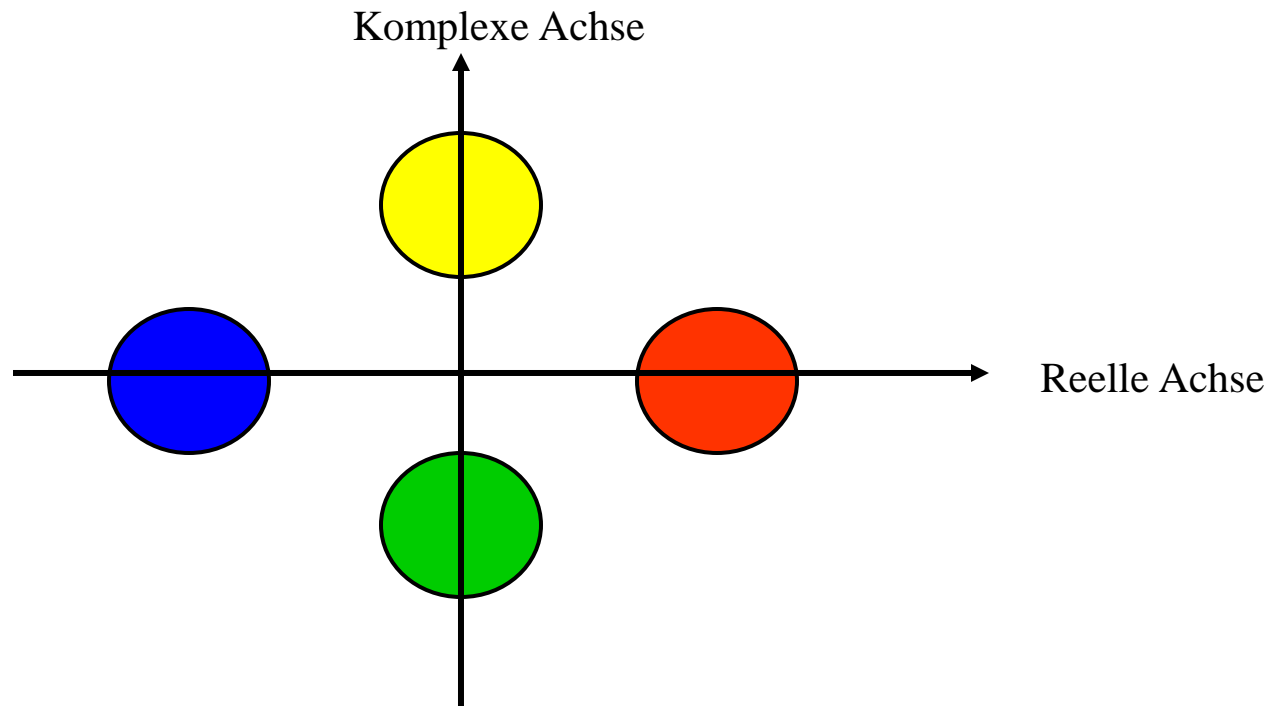
$$f'(x) = 4x^3$$

$$\textit{Iteration: } x_{i+1} = x_i - \frac{f(x)}{f'(x)} = x_i - \frac{x^4 - 1}{4 \cdot x^3}$$

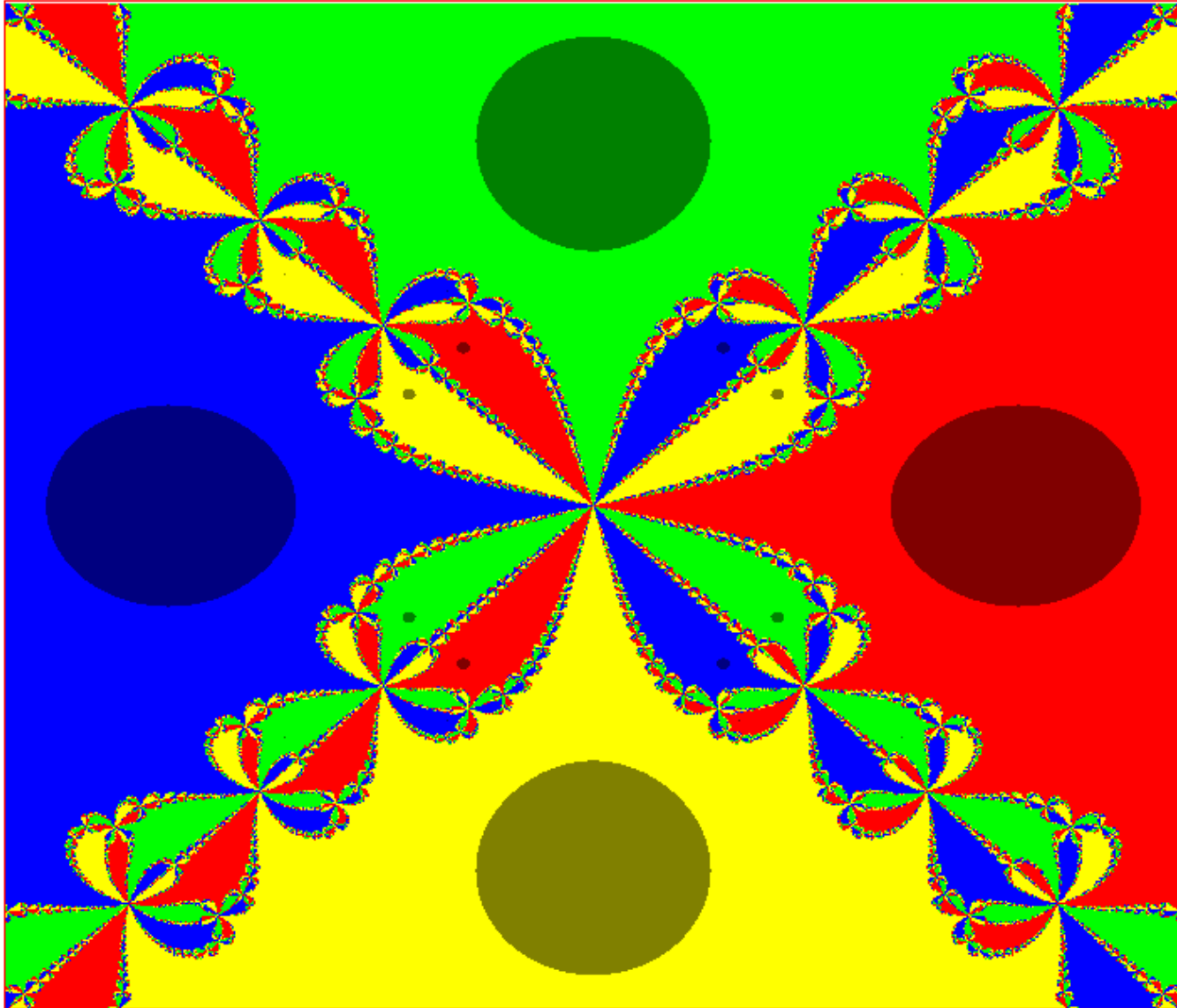
- Nullstellen:
- $x_1 = +1 / 0i$
 - $x_2 = -1 / 0i$
 - $x_3 = 0 / +1i$
 - $x_4 = 0 / -1i$

Beispiel $f(x) = x^4 - 1$:

Hubbard fragte sich nun für einen beliebigen Punkt, gegen welche Nullstelle das Newton-Verfahren konvergiere und ordnete jeder Nullstelle eine Farbe zu. Damit konnte jeder geprüfte Punkt aus der komplexen Ebene einer Farbe zugeordnet werden.



Newton für die Funktion x^4-1



Fixpunkt-Iteration einer Funktion

- Gegeben eine Funktion (1 bis n-Dimensionen)
- Gesucht die Nullstellen der Funktion
- Gegeben ein Startwert x_0
- Auflösen nach dem höchsten Exponenten
- Iteration mit der Näherungsfunktion

$$F = f(x)$$

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

Beispiel Iterationsverfahren:

Gesucht ist die Nullstelle folgender Funktion:

$$f(x) = x^3 + 3x - 7 = 0$$

Auflösen nach der höchsten Potenz: $x^3 = 7 - 3x$

$$3. \text{ Wurzel : } x = \sqrt[3]{7 - 3 \cdot x}$$

- Startwert bestimmen
- Einsetzen
- Wiederholte Iteration

Iteration mit Startwert $x=5$

| | |
|--------------|-------------|
| | 1,407121018 |
| | 1,405866024 |
| +5 | 1,406500708 |
| -2 | 1,406179803 |
| 2,351334688 | 1,406342075 |
| -0,377985795 | 1,406260024 |
| 2,011101381 | 1,406301514 |
| 0,988773046 | 1,406280534 |
| 1,591844025 | 1,406291143 |
| 1,305395314 | 1,406285778 |
| 1,455557595 | 1,406288491 |
| 1,380919225 | 1,406287119 |
| 1,418999878 | 1,406287813 |
| 1,399829973 | 1,406287462 |
| 1,409545329 | 1,40628764 |
| 1,404638359 | 1,40628755 |

Beispiel Iterationsverfahren:

Gesucht ist die Nullstelle folgender Funktion:

$$f(x) = x^5 + 3x^2 + 2x - 7 = 0$$

Auflösen nach x: $x^5 = 7 - 2 \cdot x - 3x^2$

$$5. \text{ Wurzel : } x = \sqrt[5]{7 - 2 \cdot x - 3 \cdot x^2}$$

- Startwert bestimmen
- Einsetzen
- Wiederholte Iteration

Iteration mit Startwert $x=1$

| | |
|--------------|--------------|
| 1 | -1,115186869 |
| 1,148698355 | 1,406254184 |
| 0,942592272 | -1,117807689 |
| 1,19621998 | 1,4056238 |
| 0,793576034 | -1,116963691 |
| 1,286460079 | 1,40582716 |
| -0,8833517 | -1,117236208 |
| 1,450724923 | 1,405761534 |
| -1,172424466 | -1,11714829 |
| 1,391722326 | 1,40578271 |
| -1,097751602 | -1,117176661 |
| 1,410366348 | 1,405775877 |
| -1,123259071 | -1,117167507 |
| 1,40430216 | |

Beispiel Intervallhalbierungsverfahren:

Gesucht ist die Nullstelle einer Funktion:

Prinzip „binäres Suchen“

Gegeben: Funktion
 obere Grenze
 untere Grenze

$$\text{Beispiel: } f(x) = 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 0,5$$

Gesucht x mit folgenden Bedingungen:

$$f(x) = 5,5$$

$$2 \leq x \leq 7$$

Wertetabelle:

| x | f(x) | Grenzen |
|----------|-------------|----------------|
| 2,0 | 4,50 | |
| 2,1 | 5,33 | a |
| 2,2 | 6,22 | b |

Lösung mit dem Intervall-Halbierungsverfahren

Starten der Iteration:

| a | f(a) | b | f(b) | Mittelwert |
|---------|---------|----------|----------|------------------------|
| 2,1 | 5,33 | 2,2 | 6,22 | |
| | | | | f(2,15) = 5,7676 |
| | | 2,15 | 5,7676 | |
| | | | | f(2,125) = 5,5469 |
| | | 2,125 | 5,5469 | |
| | | | | f(2,1125) = 5,43797 |
| 2,1125 | 5,43797 | | | |
| | | | | f(2,11875) = 5,492 |
| 2,11875 | 5,492 | | | |
| | | | | f(2,121875) = 5,5195.. |
| | | 2,121875 | 5,519560 | |

• 0,78629964784689118474566066128654

Exakte Lösung:

x : [2.11963298118022, 2.11963298118023]

x: [untere Grenze, obere Grenze]

$$x = \frac{2}{3} + \sqrt{\frac{19}{9}}$$

Weitere Beispiele:

2) gegeben eine Funktion $f(x)$

$$f(x) = (4970x - 4923) / (4970x^2 - 9799x + 4830)$$

Gesucht die numerische Ableitung an der Stelle $x=1$.

$$f''(x) = (f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)) / h^2$$

| Schrittweite h | Ergebnis |
|-----------------------|-----------------|
| 10^{-4} | 70,7804 |
| 10^{-5} | 93,1278 |
| 10^{-8} | 30695,4411 |

Exakt: $f''(1) = 94,0000$

Weitere Beispiele:

3) Lösen eines linearen Gleichungssystems

$$64.919.121,0 \cdot X - 159.018.721,0 \cdot Y = 1,0$$

$$41.869.520,5 \cdot X - 102.558.961,0 \cdot Y = 0,0$$

Lösung:

$$x = 205.117.922$$

$$y = 83.739.041$$

| Sprache | Single | Double | Extended |
|---------------------------|--|-----------------------|-----------------------|
| Einsetzungs- verfahren | -2,22474479675293 -0,90824830532074 | 205117922 83739041 | 205117922 83739041 |
| Gauß | 205132766,376119 83745101,1911737 | | |

enter a(1,1) 64919121

enter a(1,2) -159018721

enter a(2,1) 41869520.5

enter a(2,2) -102558961

enter b(1) 1

enter b(2) 0

Enter the number of decimal places desired for the solution.

n is interpreted as n decimal fixed-point

-n is interpreted as n decimal floating-point 20

Solution of equations

x(1) = 205117922.0000000000000000000000~

x(2) = 83739041.0000000000000000000000~

Weitere Beispiele:

4) Lösen eines linearen Gleichungssystems

$$714.110.331,0 \cdot x - 2.067.243.373,0 \cdot y = 143$$

$$460.564.725,5 \cdot x - 1.333.266.493,0 \cdot y = 0$$

Lösung:

$$x = 2.666.532.986$$

$$y = 921.129.451$$

| Sprache | Single | Double | Extended |
|---------------------------|--|--|-----------------|
| Einsetzungs- verfahren | -2,83079051971436 -0,97787082195282 | 1,00124584249993E-7 3,45871226067779E-8 | |
| Gauß | | 2.667.449.829,87188 921.446.166,336653 | |

Weitere Beispiele:

5) Berechnen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{cccccc} -367.296 \cdot t & -43.199 \cdot u & +519.436 \cdot v & -954.302 \cdot w & = & 1 \\ +259.718 \cdot t & -477.151 \cdot u & -367.295 \cdot v & -1.043.199 \cdot w & = & 1 \\ +886.731 \cdot t & +88.897 \cdot u & -1.254.026 \cdot v & -1.132.096 \cdot w & = & 1 \\ +627.013 \cdot t & +566.048 \cdot u & -886.732 \cdot v & +911.103 \cdot w & = & 0 \end{array}$$

Lösung:

$$t = 8,86731088897 \cdot 10^{17}$$

$$u = 8,86731088897 \cdot 10^{11}$$

$$v = 6,27013566048 \cdot 10^{17}$$

$$w = 6,27013566048 \cdot 10^{11}$$